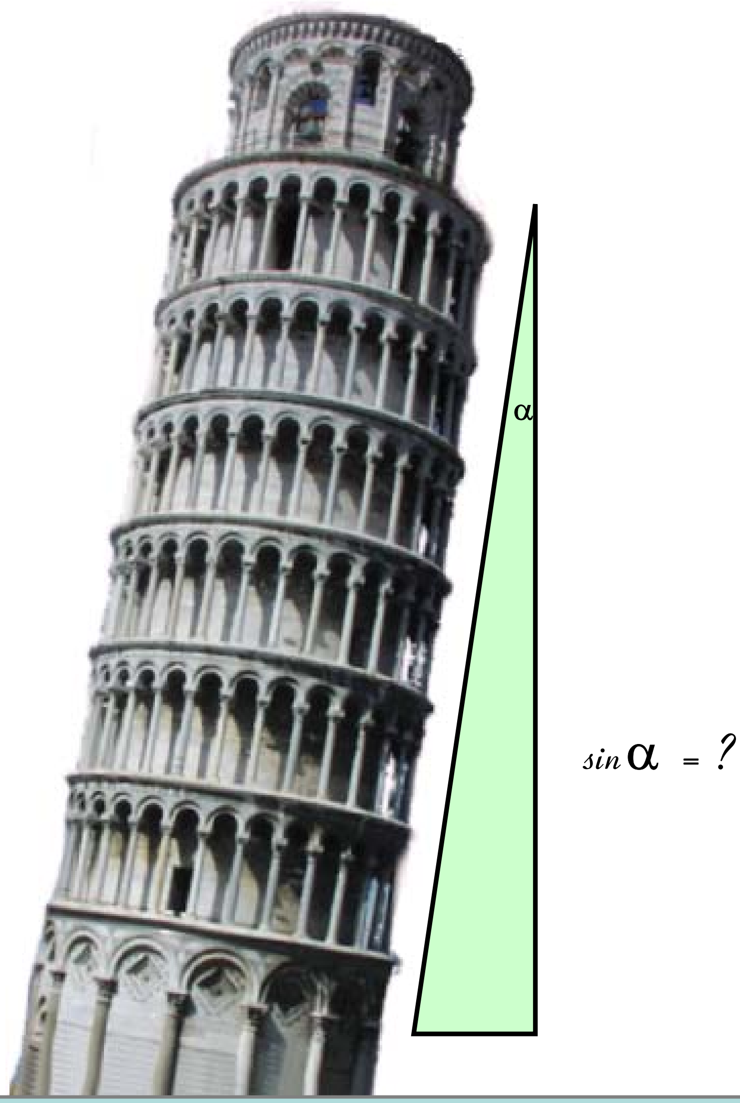


Vorabfassung

PISA 2000
eine neue Mathematik?

Stephan Hußmann, Burkhard Jungkamp, Timo Leuders, Gerd Möller

Vorabfassung

PISA 2000 - eine neue Mathematik?

Über die Mathematik-Items der PISA- und der PISA-E-Studie ist intensiv diskutiert worden. Manche sind als ungewöhnlich, andere als sehr schwierig, wieder andere als eher einfach bezeichnet worden.

Ob Schülerinnen und Schüler genau das richtig abrufen können, was in den Lehrplänen der einzelnen Länder ausgewiesen ist, das war - genau genommen - nicht die zentrale Frage. Wie aber steht es um ihre mathematische Grundbildung? Verfügen sie wirklich über jene mathematischen Kompetenzen, die für die erfolgreiche Teilhabe an einer durch Naturwissenschaft und Technik geprägten Gesellschaft erforderlich sind? Das sind die Kernfragen des „*mathematical literacy*“-Konzepts.

Mathematik in der Schule, so lautet die Botschaft, zielt nicht allein auf Formelwissen und technische Fähigkeiten, sondern immer auch auf die Fähigkeit, mathematische Kenntnisse in ganz verschiedenen Situationen anzuwenden.

Sinn und Zweck des Lernens von Mathematik ist vor allem die aktive Auseinandersetzung der jungen Menschen mit herausfordernden Phänomenen und Problemen. Es geht nicht nur um Mathematik an sich, sondern eben auch um die Beziehung zwischen Mensch und Wissenschaft. Und da ist Mathematik in der Schule bekanntlich mehr als eine „fertige Wissenschaft“. Da dürfen Fragen der Genese, der Relevanz und des Nutzens von Mathematik nicht ausgeblendet werden.

Hier setzt PISA an. Und wenn Sie darüber mehr erfahren möchten, dann informieren Sie sich - beispielsweise auf den Seiten des Max-Planck-Institutes für Bildungsforschung unter

www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/

oder auf unserem Bildungsserver learn:line unter

www.learn-line.nrw.de/angebote/pisa

Doch bevor Sie diese Angebote nutzen, bitten wir Sie im Goetheschen Sinne: „Verweile doch!“. Denn auf den folgenden Seiten werden wir konkret und stellen Ihnen einige der PISA- und PISA-E- Items vor. Lassen wir einmal Ranglisten und Statistiken beiseite! Schauen wir genauer auf die Aufgaben und gehen wir den Fragen nach:

- Was ist an ihnen anders als an herkömmlichen Aufgaben? Oder: Sind sie überhaupt anders?
- Welche Chancen eröffnen sie für den heutigen Mathematikunterricht?
- Wie viele Schülerinnen und Schüler konnten sie lösen und was sagt uns das?

Anmerkung:
Die internationalen Aufgaben sind frei über das Internet verfügbar unter http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/beispielaufgaben.html.
Die Darstellung der Aufgaben in diesem Heft entspricht den originalen Testheften, Format, Anordnung und Nummerierung sind allerdings komprimiert und verändert.. Das Zahlenrohmaterial für die hier berechneten Lösungshäufigkeiten des internationalen Testteils stammt ausschließlich von den PISA-Seiten der OECD (http://www.pisa.oecd.org). Die Lösungshäufigkeiten des nationalen Testteils wurden dankenswerterweise von Prof. Dr. Michael Neubrand zur Verfügung gestellt. Die internationalen Aufgaben haben wir gekennzeichnet mit einem und die der deutschen Ergänzungsstudie (PISA-E) mit einem .

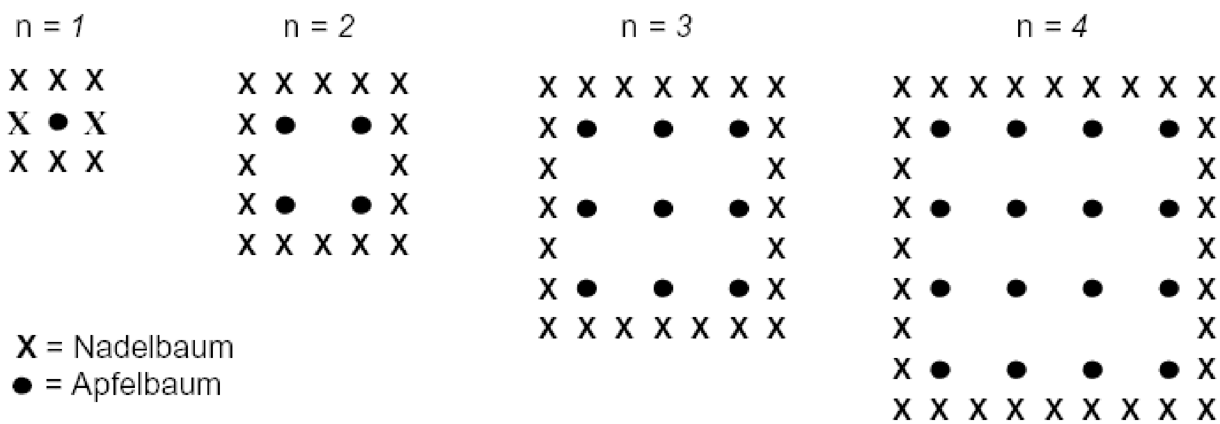
Stephan Hußmann, Burkhard Jungkamp, Timo Leuders, Gerd Möller

Über eingekleidete Wirklichkeit
Mit mathematischen Modellen die Realität darstellen

Aufgabe 1: ÄPFEL

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume an, die er in einem quadratischen Muster anordnet. Um diese Bäume vor dem Wind zu schützen, pflanzt er Nadelbäume um den Obstgarten herum.

Im folgenden Diagramm siehst du das Muster, nach dem Apfelbäume und Nadelbäume für eine beliebige Anzahl (*n*) von Apfelbaumreihen gepflanzt werden:



Hier wird ein durchaus realer Kontext beschrieben, der für Schülerinnen und Schüler leicht vorstellbar und nachvollziehbar ist. Im Anschluss daran werden die Fragen gestellt – ein für PISA typisches Aufgabenformat.

Von einer echten „Anwendungsaufgabe“ oder einer „realistischen“ Aufgabe zu sprechen, schiene fehl am Platz, eher handelt es sich hier um eine *eingekleidete Aufgabe*, wie sie in unseren Schulbüchern Gang und Gäbe ist. Noch dazu sind der zugrunde liegende reale Kontext und die Aufgabenstellungen schon in eine mathematische Form gebracht. Der Vorteil für Schülerinnen und Schüler liegt auf der Hand: Am Verständnis des Kontextes und an möglichen Modellierungsproblemen wird niemand scheitern.

Für eine Testaufgabe mag dies ja sinnvoll sein – aber ist es im Unterricht für junge Menschen nicht viel spannender, mit wesentlich offeneren Situationen einzusteigen? Könnten nicht verschiedene Möglichkeiten der Mathematisierung zugelassen sein, zum Beispiel indem ganz andere Baumanordnungen gewählt werden? Die Diskussion von Unterschieden und Gemeinsamkeiten in verschiedenen Lösungsansätzen könnte dann weit über die Aufgabenstellung hinaus führen.

1.
Vervollständige die Tabelle:

n	Anzahl Apfelbäume	Anzahl Nadelbäume
1	1	8
2	4	
3		
4		

Auf den ersten Blick ist diese Aufgabe ausgesprochen einfach: Das Abzählen im Bild und das Eintragen in die Tabelle dürften keine besonderen Anforderungen an Schülerinnen und Schüler stellen. Immerhin müssen sie zwischen der geometrischen und tabellarischen Darstellung hin und her gehen. Und sie müssen Information aus dem Text („n bedeutet die Zahl der Reihen") verstehen – als Beleg für ihre *Lesekompetenz*.

Überraschend jedoch: Von den deutschen Schülerinnen und Schülern haben diese Aufgabe weniger als 50% richtig gelöst. Somit liegt Deutschland zusammen mit den meisten andern europäischen Nachbarn, einschließlich der skandinavischen, durchaus im internationalen Schnitt – rühmlich ist diese Leistung dennoch nicht.

Wie lässt sich eine solche unerwartete Schwierigkeit erklären? Stellen Sie doch einmal eine neunte Klasse mit dieser oder einer ähnlichen Aufgabe auf die Probe. Diskutieren Sie mit den Schülerinnen und Schülern einmal deren Fehler: Einige haben die Aufgabe vielleicht einfach unterschätzt und sind vorschnell mit falschen Zählstrategien an die Aufgabe herangegangen – vielleicht haben sie die Eckpunkte doppelt gezählt. Das systematische, reflektierte und kontrollierte Zählen ist aber sicherlich eine Fähigkeit, die über den Mathematikunterricht hinaus lebensbegleitend von Bedeutung sein wird.

Die Niederlande und Großbritannien stehen bei dieser Teilaufgabe mit ca. 68% schon besser da und japanische Schülerinnen und Schüler erreichen gar 85%. Diese Sicherheit würden wir uns für unsere Schüler wünschen – und sie ist durchaus nicht utopisch, wenn wir so grundlegende Fähigkeiten wie das systematische Zählen im Unterricht, auch in höheren Klassenstufen, ausdrücklich fördern und fordern.

2.
Es gibt zwei Formeln, die man verwenden kann, um die Anzahl der Apfelbäume und die Anzahl der Nadelbäume für das oben beschriebene Muster zu berechnen:

Anzahl der Apfelbäume = n^2
Anzahl der Nadelbäume = $8n$

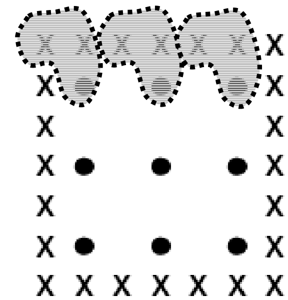
wobei *n* die Anzahl der Apfelbaumreihen bezeichnet.

Es gibt einen Wert für *n,* bei dem die Anzahl der Apfelbäume gleich groß ist wie die Anzahl der Nadelbäume. Bestimme diesen Wert und gib an, wie du ihn berechnet hast.

Das ist „klassische" Mathematik! Zur dargestellten Situation kommen die Terme n^2 und $8n$ hinzu – man kann dies ein *symbolisches Modell* nennen, mit dem dann Fragen über die zugrundeliegende Wirklichkeit gestellt und mathematisch beantwortet werden können.

Wohl am schwierigsten ist es für Schülerinnen und Schüler, ein richtiges Modell zu *finden*. Hier ist Kreativität und mutiges Ausprobieren gefragt, hier werden einige aus Zahlenbeispielen abstrahieren, andere werden es sich vielleicht zeichnerisch plausibel machen (s. Abbildung).

Für den PISA-Test hat es aber gereicht, aus der Frage herauszulesen, welche Gleichung man aufstellen muss. Und diese können auch jene Schülerinnen und Schüler lösen, die quadratische Gleichungen noch nicht behandelt haben – durch Probieren oder „scharf Hinsehen“ ($n \cdot n = 8 \cdot n$ also $n=8$). All diese Lösungswege galten beim PISA-Test als richtig.



Offenbar ist diese Aufgabe schwierig, denn in kaum einem europäischen Land erreicht die Lösungshäufigkeit der Schülerinnen und Schüler hier die 30%-Marke. Deutschland liegt mit 25% im Schnitt, Norwegen und Schweden liegen mit 12% bzw. 15% deutlich darunter, allein die Niederländer stechen mit knapp 50% heraus und ziehen so mit den Japanern gleich.

Frage 3:
Angenommen, der Bauer möchte einen viel größeren Obstgarten mit vielen Reihen von Bäumen anlegen. Was wird schneller zunehmen, wenn der Bauer den Obstgarten vergrößert: die Anzahl der Apfelbäume oder die Anzahl der Nadelbäume? Erkläre, wie du zu deiner Antwort gekommen bist.

Diese Frage ist offensichtlich schon eine „harte Nuss“. Die Schülerinnen und Schüler unter den Lesern werden das bestätigen. Hier wird ja nicht einmal mehr die Lösungsmethode nahe gelegt! Und dann wird im zweiten Teil auch noch verlangt, die Vorgehensweise zu reflektieren und zu versprachlichen! Eine solche offene Aufgabe ist für Testverfahren wie PISA durchaus ungewöhnlich, aber auch hierfür kann man klare Bewertungskriterien formulieren. Als korrekt galten die richtige Antwort auf der Basis von spezifischen Beispielen oder die Nennung von Anhaltspunkten, die zeigen, dass die Beziehung zwischen n^2 und $8n$ verstanden wurde.

Schülerinnen und Schüler können diese Aufgabe also auch lösen, ohne formal mit Ungleichungen wie $n^2 > 8n$ zu hantieren. Etwa so: „Bei den Tannen kommt jedes Mal die selbe Zahl hinzu, bei den Obstbäumen jedes Mal mehr, also müssen die Obstbäume irgendwann die Oberhand gewinnen.“

Man sieht: Auch hier geht es um den *flexiblen* Einsatz mathematischer Denkweisen in unterschiedlichen Kontexten, nicht um Rechentechnik. Wer dies im Unterricht ausprobieren will, kann weitere Fragestellungen hinzufügen, und die unscheinbare Aufgabe „Apfelbäume“ wird zu einem spannenden „Forschungsgegenstand für das Klassenzimmer“: „*Welche anderen Muster kannst du dir vorstellen? Wie sieht es hier mit dem Verhältnis Tanne zu Obstbaum aus? Vergleiche den Umfang und Flächeninhalt von verschieden großen Kreisen oder Quadraten. Welche Rolle spielt hier das* n *? Was hat dieses Problem mit den Tannen und Obstbäumen zu tun? Begründet eure Vermutung, schreibt kurze Texte!*

Das geht doch nicht!
Schätzen und Überschlagen in unklaren Situationen

<u>Aufgabe 2: FLÄCHE EINES KONTINENTS</u>

Hier siehst du eine Karte der Antarktis.

Frage:
Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

Hier haben wir wieder eine ganz typische PISA-Aufgabe vor uns. Sache und Frage leuchten unmittelbar ein – aber wie kommt hier Mathematik ins Spiel? werden unsere Schülerinnen und Schüler fragen.

Dabei wird hier rechentechnisch gar nicht viel verlangt: Ablesen von Maßstäben und die Flächenberechnung von Rechtecken reichen schon aus. Welche Flächen man hier wählt, ist ganz offen gelassen: Kreise, Rechtecke, zusammengesetzte Formen, Kästchenzählen – all dies führt zum Ziel: einem überschlagsmäßigen Wert für die Fläche. Dies ist die Art, wie man später einmal Mathematik benötigen wird. Einen Rechenweg oder eine komplizierte Formel in Erinnerung rufen, die man zehn Jahre zuvor einmal gelernt hat, ist weder sinnvoll noch möglich.

Stellt man diese Aufgabe einmal im alltäglichen Unterricht oder in einer Klassenarbeit, so kann man an der Art und Weise, wie Schülerinnen und Schüler sie mit dieser Aufgabenstellung umgehen, ablesen, welche Auffassung von Mathematik sie verinnerlicht haben. Einige glauben: Probleme sind nur dann mathematisch lösbar, wenn es eine einzige, richtige Lösung gibt. Oder: Mathematik heißt, einen gründlich einstudierten Rechenweg abarbeiten. Solche Schüler müssen bei einer Aufgabe dieses Typs frühzeitig aufgeben.

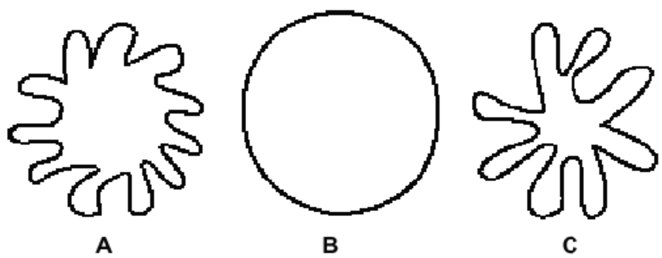
Schaut man auf die Lösungswahrscheinlichkeiten, so scheint es, dass niederländische Schülerinnen und Schüler mit solchen offenen Problemen besonders flexibel umgehen. Mit 62% ganz oder teilweise richtigen Lösungen liegen sie weit über dem internationalen Schnitt von 37,5%. Deutschland liegt mit 40% knapp darüber.

Noch interessanter ist es, zu schauen, welcher Anteil mit dieser Aufgabe gar nichts anzufangen wusste. Während hier 40% die internationale Norm ist, gaben über 69% der italienischen, aber nur 10% der niederländischen Schülerinnen und Schüler auf, bevor sie auch nur einen Ansatz notierten.

Was sagt uns das? Auch unsere Schülerinnen und Schüler können sicherlich noch stärker werden, wenn es darum geht, Probleme ohne bekannte Lösungsmethode anzugehen und diese näherungsweise und überschlagsmäßig zu lösen. Auch sollten sie verstärkt den Mut besitzen, sich mit ganz einfachen Mitteln weiter zu helfen. Die Haltung, mit der sich Schülerinnen und Schüler einem Problem nähern, ist doch mindestens ebenso wichtig ist wie die Vorkenntnisse und die eingeübten Fertigkeiten!

Eine guter Einstieg für ein solches „Einstellungstraining“ ist die folgende Variante dieser Aufgabe (die übrigens nicht in die endgültigen Testhefte aufgenommen wurde). Statt „Die Formel haben wir nicht gehabt.“ oder „Das geht nicht!“ würde man sich Antworten wie die folgende wünschen: „Dafür kann es keine einfache Formel geben, weil die genaue Form der Lappen nicht feststeht. Vielleicht kann ich aber mal versuchen mich der Form zu nähern .....“ .

Aufgabe 3: FIGUREN

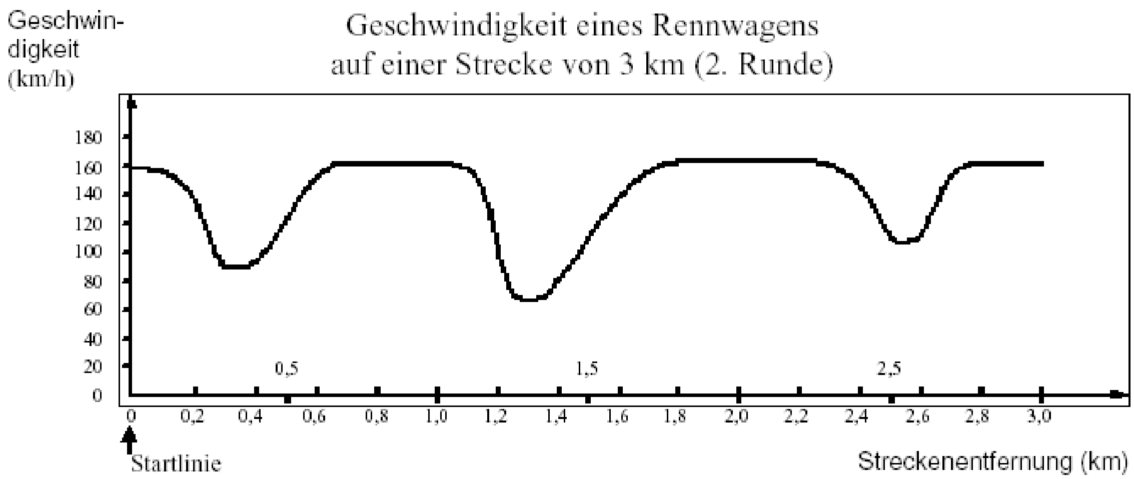


Frage 1: Welche der Figuren hat die größte Fläche? Begründe deine Antwort.
Frage 2: Gib eine Methode an, wie der Flächeninhalt von Figur C bestimmt werden kann.
Frage 3: Gib eine Methode an, wie der Umfang der Figur C bestimmt werden kann.

Verschlüsselte Botschaften?
Graphen lesen und interpretieren

<u>Aufgabe 4: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS</u>

Dieser Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.



Frage 1:
Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geradlinigen Abschnitts der Rennstrecke?
A 0,5 km - B 1,5 km - C 2,3 km - D 2,6 km

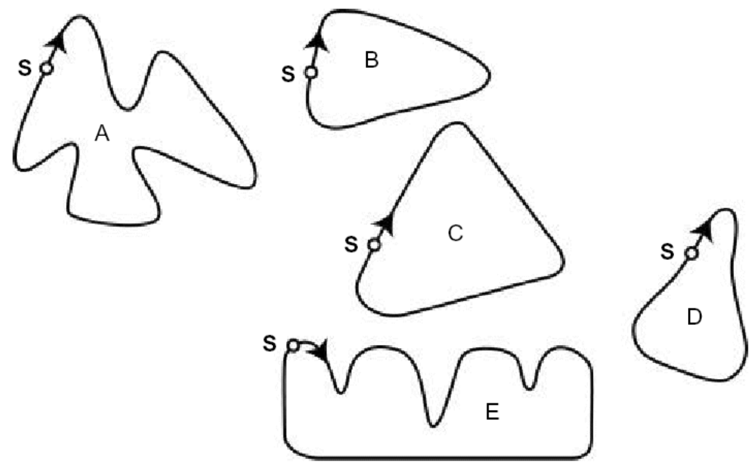
Frage 2:
Wo wurde während der zweiten Runde die geringste Geschwindigkeit gemessen?
A an der Startlinie - B bei etwa 0,8 km - C bei etwa 1,3 km - D nach der halben Runde

Frage 3:
Was kannst du über die Geschwindigkeit des Wagens zwischen den Markierungen 2,6 km und 2,8 km sagen?
A Die Geschwindigkeit des Wagens bleibt konstant.
B Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
C Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt ab.
D Die Geschwindigkeit des Wagens kann anhand des Graphen nicht bestimmt werden.

Mathematische Information kann viele Formen annehmen: Zahlen, Formeln, Figuren. Hier nimmt sie eine ganz besondere Gestalt an, die im Mathematikunterricht eine genau so wichtige Rolle spielt, wie tagein tagaus in den Medien: als grafische Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs. Die Situation an sich ist nicht schwer zu verstehen, wohl aber kommt es darauf an, ob die jungen Menschen aus dem Graphen die wesentliche Information herauslesen können. Dies gehört sozusagen zur Grundausstattung mathematischer Bildung.

Frage 4:

Hier siehst du Abbildungen von fünf Rennstrecken: Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, so dass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



Hier geht es richtig zur Sache. Wie kann man alle nötigen Teilinformationen, die im Streckenverlauf und im Graphen enthalten sind, zusammen bringen – die Position des Startpunktes, die relative Länge der Abschnitte und die relative Krümmung der Kurven? Das ist durchaus eine Schwierigkeit – übrigens nicht nur für Schülerinnen und Schüler.

In der Tat ist die Aufgabe anspruchsvoll. Sie wurde im Vergleich zu den anderen Teilaufgaben von weit weniger Schülerinnen und Schülern gelöst. Gegenüber international 60-70% bei Frage 1 und 80-90% bei Frage 2 und 3 sind es bei Frage 4 nur noch 28%. Bei dieser letzten Frage helfen keine angelernten Verfahren, sondern wieder nur die flexible Anwendung von Kernkompetenzen in einem (wahrscheinlich) neuen Kontext. Wie zu erwarten sieht das internationalen Feld auch sehr unterschiedlich aus. Während Deutschland mit den meisten anderen europäischen Staaten mit knapp 30% im Schnitt liegt, sind finnische und niederländische Schülerinnen und Schüler bei einer solchen Art von Aufgabe mit 39,4% und 42,6% überdurchschnittlich erfolgreich.

Übrigens: Aufgaben wie diese, bei denen zwischen mathematischen Zusammenhängen in grafischer Darstellung und realen Situationen hin und her übersetzt werden muss, sind dankbare Unterrichtsthemen, nicht zuletzt weil Schülerinnen und Schüler hier diskutieren und argumentieren und über Mathematik reden können.

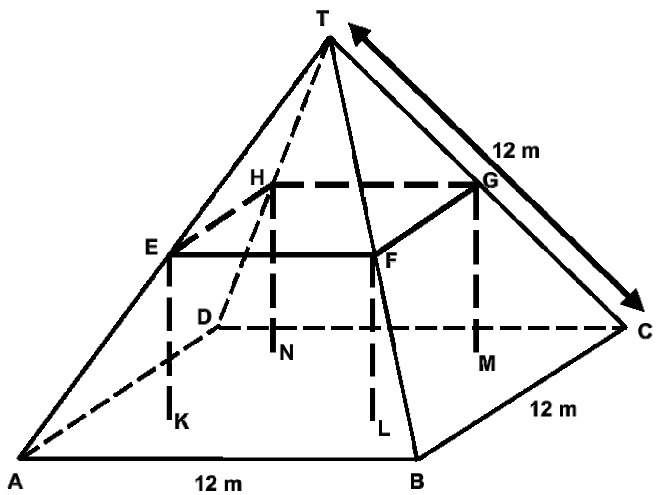
Man findet auch leicht unterschiedliche Variationen dieser Aufgabe: Der Benzinstand bei der Urlaubsfahrt in Abhängigkeit von der Fahrzeit oder von der Fahrstrecke, die Höhe eines Heißluftballons während einer Fahrt, die Kraft (physikalisch richtiger: Leistung, anschaulicher: Anstrengung) während einer Fahrradtour oder auch die Geschwindigkeit, die Höhe oder Weite bei den unterschiedlichsten Sportarten in Abhängigkeit von der Zeit – der Fantasie sind kaum Grenzen gesetzt. Statt der Rechenaufträge zu den wenigen berechenbaren Standardgraphen, gibt es hier eine Fülle von Anlässen, qualitativ über funktionale Zusammenhänge nachzudenken. Einige Fragen, die Schüler hier bearbeiten können: *Erzählt in Worten, was ihr aus dem Graphen alles ablesen könnt. Markiert bestimmte auffällige Stellen und beschreibt, was dort passiert. Gibt es unterschiedliche Auslegungsmöglichkeiten?*

Ist Mathematik nützlich?
Mathematik in realen Situationen und Kontexten

Aufgabe 5: BAUERNHÖFE

Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach. Nachfolgend siehst du eine Skizze mit den entsprechenden Maßen, die eine Schülerin vom Dach des Bauernhauses gezeichnet hat.

Der Dachboden, in der Skizze ABCD, ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten eines Quaders (rechtwinkliges Prisma) EFGHKLMN. E ist die Mitte von AT, F ist die Mitte von BT , G ist die Mitte von CT und H ist die Mitte von DT. Jede Kante der Pyramide in der Skizze misst 12 m.



Frage 1:
Berechne den Flächeninhalt des Dachbodens ABCD.
Der Flächeninhalt des Dachbodens ABCD = ______________ m²

Frage 2:
Berechne die Länge von EF , einer der waagerechten Kanten des Quaders.
Die Länge von EF = ____________ m

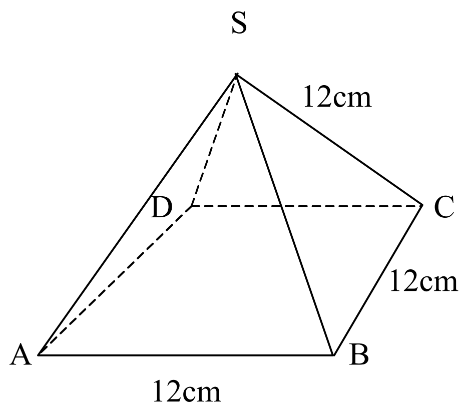
Wieder eine „typische" PISA-Aufgabe! Offensichtlich soll festgestellt werden, ob ein sehr grundlegendes mathematisches Verständnis (Berechnung einer Quadratfläche, einfachste Strahlensatzfigur) innerhalb eines übersichtlichen Kontextes aktivierbar ist. Für ein solches Verständnis von Grundbildung, bei dem es mehr um die Aktivierung und Nutzung von Wissen in unterschiedlichen Zusammenhängen als um das Abrufen von gelernten Definitionen und Verfahren geht, wird oft der Begriff *„funktionale Bildung"* verwendet. Es kommt hier nicht auf ein hohes formales Niveau an, sondern eher auf Effizienz: Auch Schülerinnen und Schüler, die die Lösung auf irgendeine andere Art und Weise erschließen oder erraten, haben erfolgreich gearbeitet.

Auch im Unterricht kann man solche funktionale Bildung einfordern und immer wieder auf die Probe stellen. Wichtig dabei ist, dass die Aufgaben nicht nur auf soeben Gelerntes oder Wiederholtes zurückgreifen – und schon wird Mathematik für Schülerinnen und Schüler zum „Ernstfall“.

Wie „funktional“ sind nun die Grundkenntnisse unserer Schülerinnen und Schüler? Neben dem Vergleich mit unseren europäischen Nachbarn kann man auch eine analoge Aufgaben aus der deutschen Zusatzerhebung heranziehen.

Aufgabe 6: PYRAMIDE

Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat. Jede Kante der skizzierten Pyramide misst 12cm.



(Bild nicht maßgenau!)

Berechne den Flächeninhalt der Grundfläche ABCD!

Bestimme den Flächeninhalt einer der dreieckigen Seitenflächen. Erkläre, wie du deine Antwort gefunden hast!

Zunächst soll wieder die Fläche eines Quadrates berechnet werden – allerdings fehlt hier der Kontext, die Aufgabe ist sozusagen bereits mundgerecht mathematisiert. Vergleicht man die Lösungshäufigkeiten, so muss man feststellen, dass deutsche Schülerinnen und Schüler die eingekleidete Aufgabe zu 51%, die rein geometrische Fassung im vertrauteren Format zu 58,8% gelöst haben. Bei letzterer war das zudem noch etwas schwieriger, weil die richtige Maßeinheit (cm^2) anzugeben war, welche bei der internationalen Aufgabe vorgegeben wurde.

Natürlich: Diese Lösungshäufigkeiten enttäuschen uns! Fünfzehnjährige sollten derart einfache Flächenberechnungen doch sicher durchführen können. Und mit den genannten 51% liegt Deutschland sogar unter dem internationalen Durchschnitt von 60%. Länder wie Finnland, die Niederlande und die Schweiz erreichen 75% bis über 80%. Aber auch in den USA scheinen Schüler mit dieser Art von Aufgaben ebenfalls Schwierigkeiten zu haben, dort wird sie nur zu 45% richtig gelöst.

Nun wird man einwenden: Unsere Schülerinnen und Schüler bearbeiten doch auch regelmäßig Anwendungsaufgaben in Kontexten, ihnen ist ein solcher Aufgabentyp also nicht neu.

Nur: Wie oft stehen solche Anwendungen direkt neben den „nackten“ Übungsaufgaben, an denen dieselbe Fähigkeit immer wieder trainiert wird, so dass ohnehin klar ist, dass diese eine Technik oder diese eine Figur in der nachfolgenden Anwendungsaufgabe wieder verwendet werden soll. Funktional werden die Grundfertigkeiten erst, wenn sie auch ohne unmittelbar vorausgehende Übung aktiviert werden können.

Auch wenn man dies nicht von allen Themen des Mathematikunterrichts erwarten kann, einige „Kerne“ von Grundbildung sollten diese Qualität haben.

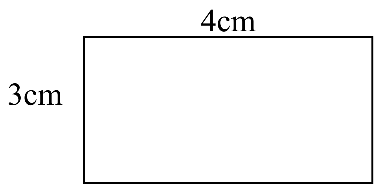
Die Anschlussaufgabe ist ungleich schwerer: Hier müssen gleich mehrere Schritte miteinander verbunden werden: Hilfslinien müssen gefunden und Zwischengrößen müssen mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Eine solche Aufgabe lösen unsere Schülerinnen und Schüler erfahrungsgemäß nach gutem Training in einer Klassenarbeit. Im PISA-Test, also ohne solche vorherige Übung, konnten nur 4% der Probanden diese Aufgabe richtig lösen.

Einen weiteren Anhaltspunkt für die Vermutung dafür, dass auch die Rahmensituation zur Schwierigkeit einer Aufgabe beiträgt, gibt eine weitere Aufgabe aus dem nationalen Ergänzungstest

Aufgabe 7: RECHTECK

Ein Rechteck ist 4cm lang und 3cm breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

- ☐ **$12cm^2$**
- ☐ **7cm**
- ☐ **$7cm^2$**
- ☐ **12cm**
- ☐ **14cm**



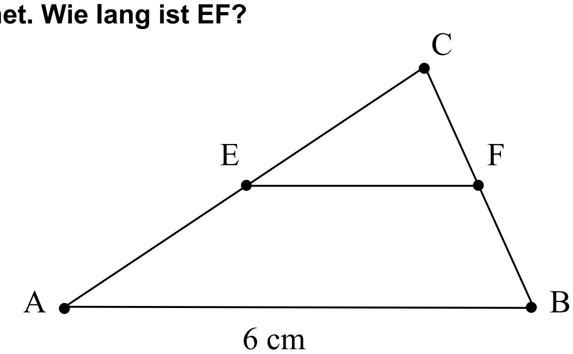
(Bild nicht maßgenau!)

Diese Aufgabe wurde von 85,2% der deutschen Schülerinnen und Schüler gelöst. Eine Flächenberechnung gänzlich ohne (außer- oder innermathematischen) Kontext fällt also wesentlich leichter. Offensichtlich hat aber immer noch ein nicht geringer Teil Schwierigkeiten mit der Grundvorstellung von Umfang und Flächeninhalt.

Auch die zweite „Frage“ der Aufgabe „Bauernhöfe“ hat eine reduzierte deutsche Variante. Hier wird der Strahlensatz bzw. die Verwendung der geometrischen Ähnlichkeit in der grundlegendsten Fassung erfragt.

Aufgabe 8: DREIECK

Die Seite AB des Dreiecks ABC ist 6cm lang. Es werden die Mittelpunkte E und F der Seiten AC und BC eingezeichnet. Wie lang ist EF?



(Bild nicht maßgenau!)

Diese Aufgabe lösten bemerkenswerterweise nur 33% der deutschen Schülerinnen und Schüler richtig, während die verwandte Frage 2 aus der Aufgabe „Bauernhöfe“ von 41% korrekt bearbeitet wurde. Liegt dies vielleicht an den zusätzlichen Symmetriemerkmalen der internationalen Aufgabe?

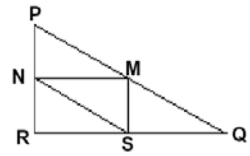
Über innermathematische Kontexte
Mathematische Begriffe verstehen

Aufgabe 9: DREIECKE

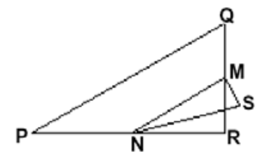
Frage:
Kreise die Figur ein, die zur folgenden Beschreibung passt.

Das Dreieck PQR hat einen rechten Winkel in R.
Die Strecke RQ ist kürzer als die Strecke PR .
M ist Mittelpunkt der Strecke PQ und N ist Mittelpunkt der Strecke QR.
S ist ein Punkt im Inneren des Dreiecks.
Die Strecke MN ist länger als die Strecke MS .

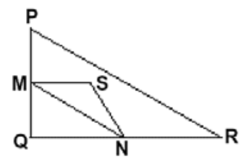
A



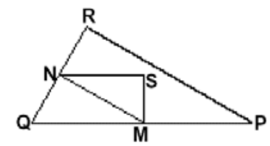
B



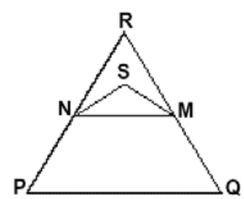
C



D



E



Hier haben wir eine Aufgabe, die unter den internationalen PISA-Items einen Außenseiter darstellt: Die Fragestellung wird nicht in eine reale Situation eingebettet. Stattdessen müssen die Schülerinnen und Schüler bestimmte geometrische Grundbegriffe beherrschen und in einer abstrakten geometrischen Situationen wiederfinden. Auch ist ein hohes Maß an *Lesekompetenz* erforderlich, müssen wir doch zwischen der logischen Struktur des Textes und den Figuren systematisch hin- und herwechseln. Eine solche enge Verbindung von mathematischer Kompetenz und Lesekompetenz findet sich übrigens in vielen Aufgaben des internationalen Teils.

Und in einer solchen Tätigkeit liegen offensichtlich ausgesprochene Stärken deutscher Schülerinnen und Schüler. Mit 65% Lösungshäufigkeiten liegt Deutschland über dem Durchschnitt von 57,7%. Schweden liegt bemerkenswerterweise mit 42% deutlich darunter – dies gilt übrigens ebenso für viele der sonst in PISA starken Länder. Nur die Schweiz und Finnland erzielen mit 66% bzw. 68 % gute Ergebnisse, Finnland und Japan erreichen sogar 72%. Äußerst beachtenswert ist der europäische Spitzenreiter bei dieser Aufgabe: Frankreich mit 81,5%!

Diese Tendenz der „Umkehrung der Verhältnisse“ ist ein Indiz dafür, dass es unter den Ländern unterschiedliche Auffassungen darüber gibt, was „Kern des Mathematikunterrichts“ ist. Vielleicht kann man das auch so ausdrücken: Die PISA-Ergebnisse demonstrieren, wie weit in den Teilnehmerstaaten der Gedanke der „funktionalen Bildung“ im Sinne einer Anwendungsfähigkeit mathematischer Kenntnisse in der jeweiligen mathematische Unterrichtskultur verankert ist.

Wir sehen auch: Deutsche Schülerinnen und Schüler haben Stärken, die bei PISA weniger zur Geltung gekommen sind. Zugleich wollen wir nicht vergessen, dass die Fähigkeit, mathematische Grundkenntnisse in wechselnden Situationen flexibel einzusetzen, <u>auch</u> ein Ziel unseres Mathematikunterrichts ist. Das meint „aus PISA lernen“.

Die Sache mit dem Basiswissen
Elementarere technische Fertigkeiten einsetzen

Aufgabe 10: BRÖTCHEN

7 Brötchen kosten 3,15 DM. Was kosten 11 Brötchen?

□ 5,05 DM □ 4,95DM □ 4,85 DM □ 4,75 DM □ 4,65DM

Aufgabe 11: FUNKTION

Die Funktion mit der Gleichung $y=2x-1$ soll untersucht werden.
Berechne zu $y=99$ den x-Wert.

Aufgabe 12: RECHNUNG

Berechne und kreuze die richtige Antwort an

$4+3(2+1)=$

□ 11 □ 13 □ 14 □ 15 □ 21

Aufgabe 13: GLEICHUNG

Löse die Gleichung

$$4x+4=3x^2$$

Diese repräsentative Auswahl von Aufgaben aus dem nationalen Ergänzungsteil (PISA-E) zeigen vor allem eines: Hier sollten mathematische Fertigkeiten so abgefragt werden, wie sie in unseren Lehrplänen stehen, und dies in einer Form, wie sie unseren Schülern im alltäglichen Mathematikunterricht am ehesten begegnen. Die Aufgaben sind gar nicht oder nur schwach in Situationen eingekleidet und es ist klar vorgegeben, was verlangt wird.

Schon bei der TIMS-Studie hatten wir gesehen, dass deutsche Schülerinnen und Schüler im Bereich solcher technischen Fähigkeiten im internationalen Vergleich eher stark sind. Da diese Aufgaben nur in deutschen Testheften zu finden waren, lässt sich bei der PISA-Studie ein solcher internationaler Vergleich nicht anstellen. Aber auch unabhängig von den Leistungen unserer Nachbarn sind die Lösungshäufigkeiten der Aufgaben 10 bis 13 interessant:

Brötchen: 87,1%
Funktion: 40,0%
Rechnung: 60,7%
Gleichung: 6,0%

Der klassische Dreisatz in vertrauten Sachzusammenhängen scheint, wie Aufgabe 10 nahe legt, sicherer beherrscht zu werden, als das manche Klage aus Wirtschaft und Hochschule befürchten lässt. Die absoluten Lösungshäufigkeiten der anderen drei Aufgaben, die ja weit unter dem liegen, was wir unseren Schülerinnen und Schülern eigentlich zutrauen, belegen, dass wir im Mathematikunterricht vielleicht doch ein stärkeres Augemerk auf die *Nachhaltigkeit* des Gelernten richten sollten. Eine systematischere Vernetzung von Kernbeständen mathematischen Wissens kann dabei nur durch eine systematische implizite Wiederholung erreicht werden. Dazu gehört auch, Gelegenheiten zur Selbstvergewisserung anzubieten, etwa in Form von gelegentlichen, von der Leistungsbewertung unabhängigen Lernstandsdiagnosen.

Kann Mathematik Probleme lösen?

Systematisches Argumentieren – auch ohne bekannte Lösungsmethode

Aufgabe 14: 31 PFENNIG

Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Pfennig hinlegen, wenn du nur 10-Pfennig, 5-Pfennig- und 2-Pfennig-Münzen zur Verfügung hast?

Gib alle Möglichkeiten an!

Eine Aufgabe aus dem nationalen Ergänzungsteil, und doch alles andere als eine „typisch deutsche" Aufgabe! Da gibt es keinen gängigen Lösungsalgorithmus, keine Formel, die man hier anwenden könnte. Da lässt sich nur schwer sagen, was eigentlich das mathematische „Thema" dieser Aufgabe ist. Sie hat sozusagen keine wirkliche Heimat in unserem Lehrplan. Die hier benötigten Fertigkeiten lassen sich am ehesten mit „systematischem Abzählen" und „Ergebniskontrolle" umschreiben – beides fundamentale Techniken des Problemlösens. Oft gehen wir davon aus, dass man sie im Mathematikunterricht gleichsam nebenbei „mitlernt". Die Lösungshäufigkeiten aber bestätigen das nicht: Nur 2,9% aller Schülerinnen haben alle sechs Lösungen gefunden, weitere 17,9% haben wenigsten vier oder fünf Möglichkeiten angegeben.

Ob als Lehrerin oder Lehrer, ob als Schülerin oder Schüler: Sie werden mit uns übereinstimmen, dass Aufgaben wie diese in den Mathematikunterricht gehören, ja, dass sie gerade auch für die Erarbeitung im Unterricht in Einzel- oder Gruppenarbeit höchst interessant sind, vor allem wenn man sie um anregende Arbeitsanweisungen bereichert: „*Erkläre, wie du vorgegangen bist. Erkläre, warum du sicher bist, dass es keine weiteren Möglichkeiten mehr gibt. Vergleiche deine Vorgehensweise mit der deiner Mitschüler. Denke dir ähnliche Aufgaben aus, z.B. mit anderen Beträgen oder anderen Münzen. Wann sind solche ähnlichen Aufgaben schwierig zu lösen, wann sind sie besonders leicht? Welche anderen Münzwerte könnte man sich ausdenken, um Beträge mit möglichst wenigen Münzen zusammenzulegen? Mache Vorschläge für eine Reform unseres Münzsystems und begründe sie.*

„ ... und die Moral von der Geschicht' "
Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts

Wir haben gesehen, dass sich aus den Aufgabenbeispielen und Lösungshäufigkeiten – bei aller Vorsicht – in der Tat einige Deutungen und Perspektiven entwickeln lassen, die uns vielleicht weiterhelfen, unseren Mathematikunterricht besser zu verstehen und weiter zu entwickeln.

Die PISA-Aufgaben sind auf den ersten Blick oft ungewohnt – für unsere Schülerinnen und Schüler wie auch für uns Lehrerinnen und Lehrer. Auf den zweiten Blick erfordern sie Kompetenzen, die wir als Ergebnis unseres Mathematikunterrichts durchaus anstreben. Dass sie noch erfolgreicher erworben und genutzt werden können, zeigen uns die Ergebnisse vergleichbarer Nachbarstaaten. Hier können und hier sollten wir uns Anregungen für unsere eigene Unterrichtskultur holen.

Nur müssen wir unseren Unterricht aus unseren eigenen Stärken heraus entwickeln. Man kann fremde Unterrichtsweisen analysieren, aber man kann sie nicht einfach kopieren. Das wäre allenfalls unprofessionell.

Zur mathematischen Grundbildung – das ist eine der zentralen Botschaften von PISA – gehört auch und vor allem, dass man Mathematik in Kontexten und Situation anwenden kann. Zugleich müssen unsere Schülerinnen und Schüler bestimmte Kernbestände mathematischen Wissens nachhaltig erwerben, also auch ohne unmittelbar vorausgehende Übung in Situationen abrufen können, in denen Mathematik ein erfolgreiches Werkzeug sein kann.

Nicht minder wichtig ist die Einstellung, mit der Schülerinnen und Schüler mathematischen Problemen begegnen. Wenn sie Mut besitzen, mit offenen Problemstellungen ohne Ängste umzugehen, auch vorläufige und überschlagsmäßige Lösungen anzubieten oder sich individuelle Lösungswege zu suchen, ohne dabei in Kategorien von falsch und richtig zu denken, werden sie auch in Zukunft Mathematik als erfolgreiche Methode, der Welt zu begegnen, wahrnehmen.

Bei der Diskussion um mathematische Grundkompetenzen dürfen wir eines nicht vergessen: Mathematikunterricht besteht aus mehr als dem, was die PISA-Studie abgefragt hat. Auch die Schönheit der Mathematik und ihre besondere Art, über die Welt nachzudenken, ist ein Bestandteil von mathematischer Allgemeinbildung, die wir im Mathematikunterricht vermitteln wollen.

Was ist mathematische Grundbildung?
„mathematical literacy“ im Sinne der PISA-Studie

Wenn man die Phänomene der Wirklichkeit erfassen will, muss man vereinfachen, klassifizieren, Modelle bilden. Die Mathematik stellt hierfür Werkzeuge zur Verfügung, Begriffe und Verfahren, mit denen man die Strukturen der Wirklichkeit systematisch erfassen kann. Doch diese Werkzeuge muss man beherrschen, man muss sie kreativ und flexibel einsetzen können. Ein Werkzeug ist schließlich immer nur so gut wie derjenige, der es nutzt.

Diese Sicht auf mathematische Grundbildung wird *mathematical literacy* genannt und liegt den PISA-Aufgaben zugrunde. In den Worten des PISA-Konsortiums:

> *„Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.“*
> (OECD 1999, Measuring student knowledge and skills: A new framework for assessment. Paris)

Dieses Konzept ist schon viel älter und geht auf Ideen des niederländischen Mathematikdidaktikers Hans Freudenthal zurück. Er stellt fest: Mit mathematischen Begriffe kann man die physikalische, geistige und soziale Welt strukturieren. Das ist mehr als das Beherrschen von Rechenroutinen. Hier geht es auch um mathematische Kompetenzen wie

- mathematisieren und modellieren
- Probleme erkennen und lösen
- mathematischen Darstellungen verwenden
- über den Einsatz von Mathematik reflektieren.

Selbstverständlich geht all dies nicht ohne solides Faktenwissen, z.B. in Form von Sätzen, Regeln und Verfahren. Doch sind diese Routinefertigkeiten auch kein Selbstzweck, sondern bekommen erst durch die Anwendung in bedeutsamen Kontexten einen Sinn. Dies kann und muss dem Lernenden jederzeit deutlich sein.

Der englische Begriff *literacy* bezieht sich zunächst einmal auf die Beherrschung der Schriftsprache als Mittel zum Zweck, nämlich zum Zweck der Verständigung und der Strukturierung eigenen Wissens. Die Wahl dieses Begriffes in Zusammenhang mit der Mathematik macht deutlich, dass auch die folgenden Kompetenzen bedeutend sind:

- mathematisch argumentieren
- kommunizieren.

Insgesamt geht es hier um die Nützlichkeit, um die Verwendbarkeit von mathematischen Fertigkeiten in unterschiedlichen Situationen. Oft fällt hierfür der Begriff der „funktionalen Bildung“.

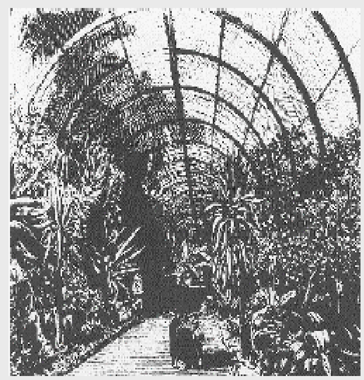
Freudenthals Vorstellungen von mathematischer Bildung wurden in der niederländischen Konzeption der *Realistic Mathematics Education (RME)* konkretisiert. Ausgehend von realistischen Problemen (*real world problems*) werden mathematische Begriffe und Konzepte entwickelt, die zum Verständnis, zur Strukturierung oder zur Lösung hilfreich sind. „*Real world problem“* meint dabei nicht zwingend realitätsorientiert, sondern es muss sich „real“ für die Schülerinnen und Schüler darstellen, indem es für sie „wirklich“ zu einer interessanten Problemsituation wird. Dabei sind ausdrücklich auch innermathematische Probleme gemeint.

Die PISA-Aufgaben orientieren sich an diesem Konzept. Als Testaufgaben sind sie natürlich immer vereinfacht. Sie dienen dazu, zu überprüfen, ob bei Schülerinnen und Schülern bestimmte notwendige Kompetenzen vorhanden sind und nicht dazu, diese Kompetenzen zu fördern und zu entwickeln. Insofern sind die PISA-Aufgaben auch nur bedingt für die Begriffsentwicklung im üblichen Unterricht geeignet.

Echte Problemsituationen, aus denen mathematische Begriffe entstehen, müssen komplexer und beziehungsreicher sein. Ein kleiner Auszug aus einer solchen „realistischen Aufgabe“ soll hier dargestellt werden. Die vollständige Aufgabe und viele weitere finden sich im Internet unter www.alympiade.de.

Artenvielfalt

Die Pflanzen und Tiere auf unserem Planeten haben es schwer. Eine zunehmende Zahl der Arten stirbt aus und die Existenz vieler anderer ist ernsthaft gefährdet. Naturschutzorganisationen versuchen, das „Blatt zu wenden“, und zwar lokal und global. Aber es scheint ein hoffnungsloser Kampf zu sein. Zusätzlich zu den ökonomischen und finanziellen Schwierigkeiten gibt es solche biologischer Art: die Bevorzugung einer Spezies ist oft hinderlich für eine andere. Alle diese Probleme beim Erhalt einer möglichst großen Artenvielfalt haben die Bemühungen darum jedoch nicht aufhalten können.



Auf einer Kautschukplantage ist die Vielfalt der Pflanzen naturgemäß geringer als in einem natürlichen Waldstück. Es soll nun ein Maß für die Artenvielfalt gefunden werden. Um die Bedingungen zu untersuchen, die dieses Maß erfüllen soll, hat man vier Fotos von verschiedenen Kombinationen von 5 Pflanzen gemacht. Die folgende Anzahl an Pflanzen ist auf dem jeweiligen Foto dargestellt.

	A	B	C	D	E
Foto 1	40	10	20	5	5
Foto 2	40	20	-	25	30
Foto 3	40	20	10	25	30
Foto 4	40	30	10	-	20

Experten wurden aufgefordert, diese Fotos in eine Rangfolge abnehmender Vielfalt zu bringen. Eindeutig war ihre Entscheidung, Foto 3 zeige die größte Vielfalt; sie platzierten 2 vor 4, waren sich aber bei 1 nicht einig. Letztendlich kamen sie zu dieser Rangfolge: Foto 3 → Foto 2 → Foto 4 → Foto 1

Aufgabe 1
Nenne die für Artenvielfalt ganz offensichtlich wichtigen Faktoren.

Aufgabe 2
Ein Weg, Artenvielfalt zu definieren, ist, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit der man zwei verschiedene Arten erhält, wenn man zufällig aus der Menge auswählt. (Üblich ist zwar die Auswahl „ohne Zurücklegen“, wir wählen aber „mit Zurücklegen“.) Entwirf eine Formel für die Artenvielfalt. Untersuche, wie sich die Formel verhält, wenn man auf die Grenzen der Vielfalt achtet und wenn die Vielfalt eine Obergrenze für eine Auswahl an Pflanzen hat. Kannst du eine Formel für diese Obergrenze angeben? Welche Rolle spielt diese Obergrenze?

Was müssen die Schülerinnen und Schüler zur Lösung der Problemsituation „Artenvielfalt“ leisten? Das Problem wird ausgehend von einer allgemeinen Perspektive, der Existenzgefährdung von Pflanzen und Tieren, auf das Problem der Artenvielfalt von Pflanzen zugespitzt. Aus dem Text müssen Informationen und Fragestellungen gewonnen werden, man kann sagen: Der Text muss decodiert werden. Das führt zu unterschiedlichen Fragestellungen, wie z.B.: „Warum haben die Experten so entschieden? Was ist Artenvielfalt? Was gibt es für Einflussfaktoren für Artenvielfalt? Lässt sich ein Maß für Artenvielfalt angeben?“

Zur Bearbeitung dieser Fragen, die alle auf die Bestimmung von Kriterien für Artenvielfalt und die Konstruktion eines geeignetes Maßes dafür hinauslaufen, stellen die Schülerinnen und Schüler Hypothesen und Modelle auf. So lassen sich aus dem Text beispielsweise die Information gewinnen, dass „die Bevorzugung einer Spezies [...] oft hinderlich für eine andere" ist oder dass die von den Experten favorisierte Reihenfolge von der Summe der Anzahlen der einzelnen Arten abhängt. In der Diskussion über die für Artenvielfalt wichtigen Faktoren können zudem die Modellierungsschritte, die der Aufgabenformulierung schon zugrunde liegen, diskutiert werden: „In wie weit werden die Größe der fotografierten Blumenfelder berücksichtigt bzw. der Einfluss des biologischen Milieus? Ist die Verteilung der einzelnen Arten von Bedeutung?" All dies sind wichtige Bestandteile des Modellierungs- und Begriffsbildungsprozesses? Die Definition eines Maßes für Artenvielfalt basiert genau auf diesen Annahmen.

Es ist zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler schon in Aufgabenteil 1 eine Vorstellung für ein Maß entwickeln. Dies hilft ihnen, das in Aufgabe 2 vorgeschlagene Maß kritisch und selbstbewusst zu verstehen und anzuwenden, aber auch die Entwicklung anderer Maße zuzulassen. Sie werden dabei notwendigerweise argumentieren, mathematisieren und ihr Ergebnis in der gegebenen Situation interpretieren und bewerten. Auf solche Fähigkeiten und Fertigkeiten wurde im PISA-Test – natürlich auf niedrigerer Stufe – besonderes Augenmerk gelegt.

Inhaltlich zielt die Aufgabe auf die Entwicklung oder Vertiefung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Vielleicht lassen sich sogar die Pfadregel oder der Unabhängigkeitsbegriff für Ereignisse eigentätig entwickeln. Die Situation ließe sich sicherlich auch noch weiter öffnen. Eine Modellformel für die Artenvielfalt könnte zugunsten kreativer Anstrengungen der Schülerinnen und Schüler zurückgehalten werden. Zuletzt müssen die Lernenden eine Formel für die Obergrenze der Artenvielfalt angeben und deren Rolle diskutieren. Dieses dynamische Wechselspiel zwischen mathematisch-symbolischer Darstellung und Deutungen innerhalb der Realsituation trägt wesentlich zur Entstehung mathematischer Theorie bei und macht die Entstehung von mathematischen Begriffen erfahrbar.

Was kann dies alles für den Unterricht bedeuten? Wo immer möglich, komplexere, offenere und authentische Problemsituationen anbieten1 So fördert man auch die mathematische Kompetenz, die darin besteht, Probleme zu erkennen, zu strukturieren, sie in mathematische Sprache zu übersetzen und zu verarbeiten, Lösungsverfahren zu entwickeln und zu interpretieren und schließlich kritisch nach der Gültigkeit und Grenzen der mathematischen Darstellung zu fragen. Situationen mit Hilfe mathematischer Sprache zu modellieren bedeutet, dass nicht die fertige Mathematik den Ausgangspunkt bildet, sondern dass die Spannungen der ersten Begegnung eines Lernenden mit einer Problemsituation erst einmal Vorrang bekommt. So erhalten die Schülerinnen und Schüler die Chance, ihre persönliche Verbindung zur Sache zu erfahren und Sinnbezüge herzustellen, kurz gesagt: die Inhalte als lernenswert wahrzunehmen. Begriffe werden so zu Werkzeugen, die die Phänomene unseres Alltags ordnen helfen. Mathematik kann so von der einzelnen Schülerin konstruktiv erschaffen werden und der Prozess der Entstehung ist hautnah zu spüren.

Doch auch wenn der Werkzeugcharakter der Mathematik hervorgehoben wird, heißt das nicht, dass Mathematik ausschließlich als Mittel zum Zweck begriffen werden darf. Sie ist auch ein Denksystem von besonderer Art. Wenn Schülerinnen und Schüler selbst die Sprache für dieses Denksystem entwickeln, werden sie die Notwendigkeit eines deduktiven, geordneten und konsistenten Systems selbst erkennen und aufbauen. Dies erfordert von den Lehrenden Geduld und Zuversicht in die Fähigkeiten der Lernenden. Fehler auf dem Weg zur Erkenntnis müssen als notwendig und konstruktiv verstanden werden und Möglichkeiten zur Beseitigung von Hindernissen sollten bereitgestellt werden.

Kompetenzstufen, Kompetenzklassen & Co
Wie die PISA-2000 Aufgaben offiziell klassifiziert werden

Im Folgenden soll kurz dargestellt werden, welche unterschiedlichen Kategorien von Aufgaben die Testkonstrukteure verwendet haben und welche Bedeutung diese – auch für den praktischen Unterricht – haben können.

Bei der Klassifizierung der PISA-Items trifft man immer wieder auf die folgenden Begriffe:

- Kompetenzklassen
- PISA-Index ("Aufgabenschwierigkeit" in Punkten)
- Kompetenzstufen oder Leistungsstufen
- Lösungshäufigkeiten

Natürlich ist an dieser Stelle eine umfassende Darstellung fehl am Platz. Hierzu findet man in den einschlägigen PISA-Veröffentlichungen reichlich Material (s.Einleitung).

Was sind Kompetenzklassen ?

Der PISA-Test will nicht nur in der Mathematik, sondern auch im Bereich Lesen und Naturwissenschaften die Grundbildung („literacy") messen. Die Aufgaben dazu sind unterschiedlich schwierig und werden verschiedenen *Kompetenzklassen* zugeordnet. Aufgaben in der selben Kompetenzklasse sollen qualitativ ähnliche mathematische Denkprozesse erfordern, können dabei aber einen ganz unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad haben. Im internationalen PISA-Test wurden drei Kompetenzklassen gebildet, die im der nationalen Ergänzung den besonderen deutschen Verhältnissen angepasst und auf fünf Kompetenzklassen erweitert wurden:

Klasse 1 A: Technische Fertigkeiten
Bei diesen Aufgaben ist nur das Abarbeiten eines Algorithmus gefordert. Modellierung oder Argumentation sind nicht nötig.

Klasse 1 B: Einschrittige Standardmodellierung
Zur Lösung solcher Aufgabe ist eine Modellierung erforderlich. Das bedeutet aber oft nur, eine einzige Formel oder ein einziges Rechenverfahren aus dem vorhandenen Wissen auszuwählen und dann anzuwenden. Solche Aufgaben sind oft einfache „eingekleidete Textaufgaben".

Klasse 2 A: Begriffliche Modellierung
Solche Aufgaben können durch Anwendung eines einzigen begrifflichen Arguments oder durch Herstellung eines begrifflichen Zusammenhangs erfolgen. Der erforderliche Begriff kann als Wissensbestandteil oder durch Ziehen von Querverbindungen abgerufen werden.

Klasse 2 B: Mehrschrittige Modellierungen
Bei der Lösung dieser Aufgaben ist entweder Wissen aus mehreren mathematischen Zusammenhängen einzusetzen oder mehrfach gleiche Schritte vorzunehmen.

Klasse 3: Strukturelle Verallgemeinerung
Diese Aufgaben beinhalten z.B. Schritte der Verallgemeinerung, des Entwerfens einer allgemeinen komplexen Strategie, der Reflexion über das verwendete mathematische Modell oder die Darstellung eines subtilen mathematischen Arguments oder eines Beweises.

Wie entsteht die Punktewertung der Aufgabenschwierigkeit (PISA-Index)?

Bei der PISA-Studie wird eine einfache Punkteskala angegeben, mit der die Aufgabenschwierigkeit und die Schülerfähigkeit gemessen wird. Hierzu wurde im internationalen Test über alle OECD-Staaten hinweg der Mittelwert und die relative Abweichung vom Mittelwert („Standardabweichung“) bestimmt. Dann wurden die Schülerleistungen so auf Punkte umgerechnet, dass der Mittelwert 500 und die Standardabweichung 100 beträgt. Auch die Schwierigkeit einer Aufgabe wird hiernach bestimmt, und zwar so, dass Schüler mit einem Fähigkeitsniveau von X Punkten zu 62% in der Lage sind eine Aufgabe mit X Punkten zu lösen. Der so gewonnene Punktwert („Schwierigkeitsparameter“) eines Items wird als PISA-Index bezeichnet.

Was sind Kompetenzstufen?

Um eine Übersicht über die verschiedenen Einzelergebnisse zu bekommen, hat das internationale PISA-Konsortium die Leistungen in fünf Bereiche eingeteilt, die Kompetenzstufen. Ein solches Verfahren ist natürlich immer auch mit willkürlichen Festlegung von Grenzen verbunden. An Hand der Aufgaben, die in jeden Kompetenzbereich fallen, kann man im Nachhinein jedoch durchaus Aussagen über die Anforderungsmerkmale der Aufgaben und damit über die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüle machen. Die fünf Kompetenzstufen lassen sich knapp wie folgt beschreiben, in Klammern wird das Intervall der entsprechenden Punkte auf der OECD-Skala angegeben:

<u>Kompetenzstufe 1</u>: (von 329 bis 421 Punkten)
Die Aufgaben erfordern lediglich Rechnen mit Inhalten auf Grundschulniveau. Schülerinnen und Schüler auf oder unter dieser Kompetenzstufe werden als „Risikogruppe“ bezeichnet. Sie werden vermutlich Probleme bei der Suche nach Ausbildungsplätzen oder bei der Berufsfindung haben.

<u>Kompetenzstufe 2</u>: (von 422 bis 511 Punkten)
Die Aufgaben erfordern elementare Modellierungen und sind Standardaufgaben auf einem der Grundschule vergleichbaren Niveau.

<u>Kompetenzstufe 3</u>: (von 512 bis 603 Punkten)
Zur Lösung der Aufgaben werden Kenntnisse des Standardstoffes der Sekundarstufe I benötigt. Modellieren und Verknüpfen von Konzepten auch aus unterschiedlichen Wissensgebieten werden verlangt. Die Struktur des Lösungsprozesses wird allerdings durch den Kontext vorgegeben. Diese Kompetenzstufe wird von Experten und verglichen mit unseren Lehrplänen auch als Standardstufe bezeichnet. Ab hier kann man von einem ausreichenden Niveau an mathematischer Grundbildung sprechen.

<u>Kompetenzstufe 4</u>: (von 604 bis 695 Punkten)
Zur Lösung der Aufgaben sind sowohl umfangreichere technische Verfahren als auch Modellierung einfacherer begrifflicher Zusammenhänge erforderlich.

<u>Kompetenzstufe 5</u>: (ab 696 Punkten)
Die Lösung dieser Aufgaben erfordert sowohl anspruchsvolles curriculares Wissen als auch die Fähigkeit, komplexe innermathematische Modellierungen vorzunehmen und Lösungen argumentativ zu begründen bzw. Beweise zu führen.

In der folgenden Tabelle werden alle nationalen und internationalen PISA-Aufgaben, die im ersten Teil unter unterrichtspraktischen Gesichtspunkten vorgestellt wurden, und einige weitere, die öffentlich zugänglich sind, nach den oben genannten Kategorien klassifiziert.

	Kompetenz-klasse national	**PISA-Index**	**Kompetenz-stufe**	**Lösungs-häufigkeit OECD in %**	**Lösungs-häufigkeit Deutschland in %**
internationale Items					
Äpfel 1	2A	547	3	49,8	48,4
Äpfel 2	1B	655	4	24,9	24,7
Äpfel 3	2A	722	5	13,3	9,9
Fläche eines Kontinents	2A	712	5	19,7	12,2
Dreiecke	1A	537	3	58,5	65
Geschwindigkeit Rennwagen 1	1B	493	2	66,9	68,4
Geschwindigkeit Rennwagen 2	1B	403	1	83,4	82
Geschwindigkeit Rennwagen 3	1B	413	1	82,7	82,8
Geschwindigkeit Rennwagen 4	2A	655	4	28,6	29,8
Bauernhöfe 1	1B	492	2	61,4	51,2
Bauernhöfe 2	1B	524	3	55,2	41,2
nationale Items					
Pyramide 1	1B	503	2		58,8
Pyramide 2	2B	810	5		4
Rechteck	1A	383	1		85,2
Dreieck	1A	618	4		33
Brötchen	1B	361	1		87,1
Funktion, Funktionswert	1A	583	3		40
Rechnung	1A	504	2		60,7
Gleichung xy=1	2A	641	4		24,8
Quadratische Gleichung	1A	798	5		6
31 Pfennig	3	798	5		2,9
Fahrradunfälle 1		497	2		61,6
Fahrradunfälle 2		674	4		19
Glasfabrik 1	1B	471	2		68,2
Glasfabrik 2	1B	491	2		66,4
Glasfabrik 3	1B	556	3		47,1
Sparen	2B	700	5		16,1
Miete	2B	649	4		18,1
Multiplikation	1A	612	4		32,1
Items aus dem Vortest					
Figuren 1	2A	*	*	*	*
Figuren 2	2A	*	*	*	*
Figuren 3	2A	*	*	*	*